20　最大・最小

基本問題 & 解法のポイント

33　略解

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x-3}{x^2+1}=0$，$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x-3}{x^2+1}=0$

また，$y'=\dfrac{-(x^2-6x-1)}{(x^2+1)^2}$ より，$y'=0$ の解すなわち $x^2-6x-1=0$ の解は $3\pm\sqrt{10}$

したがって，増減表は次のようになる。

x	$-\infty$	$\cdots$	$3-\sqrt{10}$	$\cdots$	$3+\sqrt{10}$	$\cdots$	∞
y'	/	$-$	0	$+$	0	$-$	/
y	0	↓	極小	↑	極大	↓	0

よって，$x=3+\sqrt{10}$，$x=3-\sqrt{10}$ のとき y はそれぞれ最大値と最小値をとる。

$x=3+\sqrt{10}$ のとき

$x^2-6x-1=0$ を満たすから，$x^2=6x+1$

よって，

$$
\begin{aligned}
y&=\frac{x-3}{x^2+1}\\
&=\frac{x-3}{2(3x+1)}\\
&=\frac{\sqrt{10}}{2(10+3\sqrt{10})}\\
&=\frac{\sqrt{10}(10-3\sqrt{10})}{20}\\
&=\frac{-3+\sqrt{10}}{2}
\end{aligned}
$$

$x=3-\sqrt{10}$ のとき

同様に，$x^2=6x+1$

よって，

$$
\begin{aligned}
y&=\frac{x-3}{2(3x+1)}\\
&=\frac{-\sqrt{10}}{2(10-3\sqrt{10})}\\
&=-\frac{3+\sqrt{10}}{2}
\end{aligned}
$$

以上より，$x=3+\sqrt{10}$ で最大値 $\dfrac{-3+\sqrt{10}}{2}$，$x=3-\sqrt{10}$ で最小値 $-\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}$ をとる。

34

$\angle \mathrm{B} = \theta$ とすると，等脚台形 ABCD の高さは $a\sin\theta$，下底は $a + 2a\cos\theta$ だから，

$$S = \frac{1}{2}\{a + (a + 2a\cos\theta)\} \cdot a\sin\theta$$
$$= a^2(1 + \cos\theta)\sin\theta$$

$$S' = a^2\{-\sin^2\theta + (1 + \cos\theta)\cos\theta\}$$
$$= a(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1)$$
$$= a(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$$

これと $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，増減表は次のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
S'	/	$+$	0	$-$	/
S	/	↑	極大	↓	/

よって，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ で S は最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ をとる。

A

117

(1)

条件より，$f(x)=a+1-x+2\sqrt{x^2+a^2}$

したがって，$f'(x)=\dfrac{-\sqrt{x^2+a^2}+2x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$f'(x)=0$ のとき $-\sqrt{x^2+a^2}+2x=0$ より，

$2x=\sqrt{x^2+a^2}$ （ただし，$a>0$，$\sqrt{x^2+a^2}>0$ より，$x>0$）

この両辺を 2 乗して整理すると $3x^2=a^2$ （$x>0$）

これと $a>0$ より，$x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

よって，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	$\dfrac{a}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$1+a$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\downarrow$	$(\sqrt{3}+1)a+1$	$\uparrow$	

ゆえに，$f(x)$ は $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ のとき最小値 $(\sqrt{3}+1)a+1$ をとる。

(2)

三角形 ABC の重心の座標は $\left(\dfrac{(1+a)+0+0}{3},\ \dfrac{0+a+(-a)}{3}\right)=\left(\dfrac{1+a}{3},\ 0\right)$

$f(x)$ を最小にする点 P の座標は，(1)より，$\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\ 0\right)$

よって，$\dfrac{1+a}{3}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

ゆえに，$a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

118

(1)

$$t^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x$$
$$=1+2\sin x\cos x$$

$\therefore 2\sin x\cos x=t^2-1$

ゆえに,

$$f(x)=\frac{2at}{2+t^2-1-at}$$
$$=\frac{2at}{t^2-at+1}$$

(2)

$0\leq x\leq 2\pi$ および $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ より, $g(t)$ の定義域は $-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$

これと

$$g'(t)=\frac{2a(t^2-at+1)-2at(2t-a)}{(t^2-at+1)^2}$$
$$=-\frac{2a(t+1)(t-1)}{(t^2-at+1)^2}$$

より,

$g(t)$ の増減は次のようになる。

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$	/	$-$	0	$+$	0	$-$	/
$g(t)$	$-\frac{2\sqrt{2}a}{3+\sqrt{2}a}$	$\downarrow$	$-\frac{2a}{2+a}$	$\uparrow$	$\frac{2a}{2-a}$	$\downarrow$	$\frac{2\sqrt{2}a}{3-\sqrt{2}a}$

したがって, 最大値は $\frac{2\sqrt{2}a}{3-\sqrt{2}a}$ と $-\frac{2\sqrt{2}a}{3+\sqrt{2}a}$ のうち大きい方, 最小値は $-\frac{2a}{2+a}$ と $\frac{2\sqrt{2}a}{3-\sqrt{2}a}$ のうち小さい方である。

これと, $\frac{2a}{2-a}>0>-\frac{2\sqrt{2}a}{3+\sqrt{2}a}$, $\frac{2\sqrt{2}a}{3-\sqrt{2}a}>0>-\frac{2a}{2+a}$ $(\because 0<a<2)$ より,

よって, $t=1$ で最大値 $\frac{2\sqrt{2}a}{3-\sqrt{2}a}$, $t=-1$ で最小値 $-\frac{2a}{2+a}$ をとる。

(3)

最大値をとるときの x の値

$t=1$ と $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ より, $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって，$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2n\pi,\ \frac{3}{4}\pi+2n\pi$ （nは整数）

すなわち$x=2n\pi,\ \frac{\pi}{2}+2n\pi$

これと$0\leq x\leq 2\pi$より，$x=0,\ \frac{\pi}{2},\ 2\pi$

最小値をとるときのxの値

$t=-1$と$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$より，$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって，$x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2n\pi,\ -\frac{3}{4}\pi+2n\pi$ （nは整数）

すなわち$x=-\frac{\pi}{2}+2n\pi, -\pi+2n\pi$

これと$0\leq x\leq 2\pi$より，$x=\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

119

(1)

lの方程式は$y=-e^{-t}x+(t+1)e^{-t}$

lとx軸との交点は，$y=0$より，$-e^{-t}x+(t+1)e^{-t}=0$すなわち$e^{-t}(-x+t+1)=0$を満たす。

これと$e^{-t}>0$より，$x=t+1$

よって，lがx軸の正の部分と交わるならば$t+1>0$すなわち$t>-1$

(2)

lの方程式は$y=-e^{-t}x+(t+1)e^{-t}$ lだから，y軸と$y=(t+1)e^{-t}$と交わる。

また，(1)より，lはx軸と$x=t+1$で交わる。

よって，$S(t)=\frac{1}{2}(t+1)^2e^{-t}$

(3)

$S'(t)=\frac{e^{-t}}{2}(1+t)(1-t)$より，$S(t)$（$t>-1$）の増減は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$	/	$+$	0	$-$
$S(t)$	/	$\uparrow$	$\frac{2}{e}$	$\downarrow$

よって，$S(t)$は$t=1$のとき最大値$\frac{2}{e}$をとる。

120

(1)

$f'(x)=\dfrac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$ より，$f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ （$x\geq 1$）の増減は次のようになる。

x	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\uparrow$	$\dfrac{2}{e}$	$\downarrow$

また，$x>1$ のとき $\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}>0$

よって，$x=e^2$ のとき最大値 $\dfrac{2}{e}$ を，$x=1$ のとき最小値 0 をとる。

(2)

(1)より，$0\leq\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}\leq\dfrac{2}{e}$

よって，$0\leq\dfrac{\log x}{x}\leq\dfrac{2}{e}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{e}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$

ゆえに，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$

(3)

$0\leq\dfrac{\log(\log x)}{\sqrt{x}}=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\log(\log x)}{\log x}\leq\dfrac{2}{e}\cdot\dfrac{\log(\log x)}{\log x}$

ここで，$\log x=t$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log(\log x)}{\log x}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{\log t}{t}$

これと(2)より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log(\log x)}{\log x}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{\log t}{t}=0$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\dfrac{2}{e}\cdot\dfrac{\log(\log x)}{\log x}\right\}=0$

ゆえに，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log(\log x)}{\sqrt{x}}=0$

B

121

(1)

点Pのx座標は，$2\log x = \log x + a$ すなわち $\log x = a$ の解より，$x = e^a$

よって，そのy座標は $y = 2\log e^a = 2a$

ゆえに，点Pの座標は $\left(e^a,\ 2a\right)$

(2)

点PにおけるC_1の接線の傾きを $\tan\alpha$ とすると，$y' = \dfrac{2}{x}$ より，$\tan\alpha = \dfrac{2}{e^a}$

点PにおけるC_2の接線の傾きを $\tan\beta$ とすると，$y' = \dfrac{1}{x}$ より，$\tan\beta = \dfrac{1}{e^a}$

よって，

$$
\begin{aligned}
\tan\theta &= \tan(\alpha - \beta) \\
&= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} \\
&= \frac{\dfrac{2}{e^a} - \dfrac{1}{e^a}}{1 + \dfrac{2}{e^a} \cdot \dfrac{1}{e^a}} \\
&= \frac{\dfrac{1}{e^a}}{\dfrac{e^{2a} + 2}{e^{2a}}} \\
&= \frac{e^a}{e^{2a} + 2}
\end{aligned}
$$

(3)

解法1

$e^a = t$ とおくと，$\tan\theta = \dfrac{t}{t^2 + 2}$

ここで，$f(t) = \dfrac{t}{t^2 + 2}$ とおくと，$f(t)$ の定義域は $t = e^a > 0$

これと，$f'(t) = \dfrac{-t^2 + 2}{\left(t^2 + 2\right)^2} = -\dfrac{\left(t + \sqrt{2}\right)\left(t - \sqrt{2}\right)}{\left(t^2 + 2\right)^2}$ より，$f(t)$ の増減は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	/	$+$	0	$-$
$f(t)$	/	$\uparrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	$\downarrow$

また，$\lim_{t\to\infty} f(t)=0,\ \lim_{t\to+0} f(t)=0$

よって，$0<f(t)\leq\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　$\therefore 0<\tan\theta\leq\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解法 2

$f(a)=\dfrac{e^a}{e^{2a}+2}$ とおくと，$f'(a)=-\dfrac{e^a\left(e^a+\sqrt{2}\right)\left(e^a-\sqrt{2}\right)}{\left(e^{2a}+2\right)^2}$ より，

$f(a)$ の増減は次のようになる。

a	$\cdots$	$\log\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(a)$	$+$	0	$-$
$f(a)$	$\uparrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	$\downarrow$

また，$\lim_{a\to\infty} f(a)=0,\ \lim_{a\to-\infty} f(a)=0$

よって，$0<f(t)\leq\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　$\therefore 0<\tan\theta\leq\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

122

(1)

$X_A\,(x_A,\,0)$，$X_B\,(x_B,\,0)$ とすると，

直線 AP，BP の方程式はそれぞれ $\dfrac{x}{x_A}+\dfrac{y}{2}=1$，$\dfrac{x}{x_B}-\dfrac{y}{2}=1$ だから，

これに $P(\cos\theta,\,\sin\theta)$ を代入すると，$\dfrac{\cos\theta}{x_A}+\dfrac{\sin\theta}{2}=1$，$\dfrac{\cos\theta}{x_B}-\dfrac{\sin\theta}{2}=1$

これより，$x_A=\dfrac{2\cos\theta}{2-\sin\theta}$，$x_B=\dfrac{2\cos\theta}{2+\sin\theta}$

(2)

線分 X_AX_B の長さを $f(\theta)\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$f(\theta)=\frac{2\cos\theta}{2-\sin\theta}-\frac{2\cos\theta}{2+\sin\theta}=\frac{4\sin\theta\cos\theta}{4-\sin^2\theta}=\frac{2\sin 2\theta}{4-\dfrac{1-2\cos 2\theta}{2}}=\frac{4\sin 2\theta}{7+\cos 2\theta}$$

よって，

$$f'(\theta)=4\cdot\frac{2\cos 2\theta(7+\cos 2\theta)+2\sin^2 2\theta}{(7+\cos 2\theta)^2}=\frac{8(7\cos 2\theta+1)}{(7+\cos 2\theta)^2}$$

したがって，$f'(\theta)$の正負は$7\cos 2\theta+1$できまる。

そこで，$7\cos 2\alpha+1=0\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$とすると，

$7\cos 2\theta+1$は$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$において単調に減少するから，増減は次のようになる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$	/	$+$	0	$-$	/
$f(\theta)$	/	$\uparrow$	$f(\alpha)$	$\downarrow$	/

$7\cos 2\alpha+1=0$より，$\cos 2\alpha=-\dfrac{1}{7}$

$0<2\alpha<\pi$より，$\sin 2\alpha>0$だから，$\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

よって，

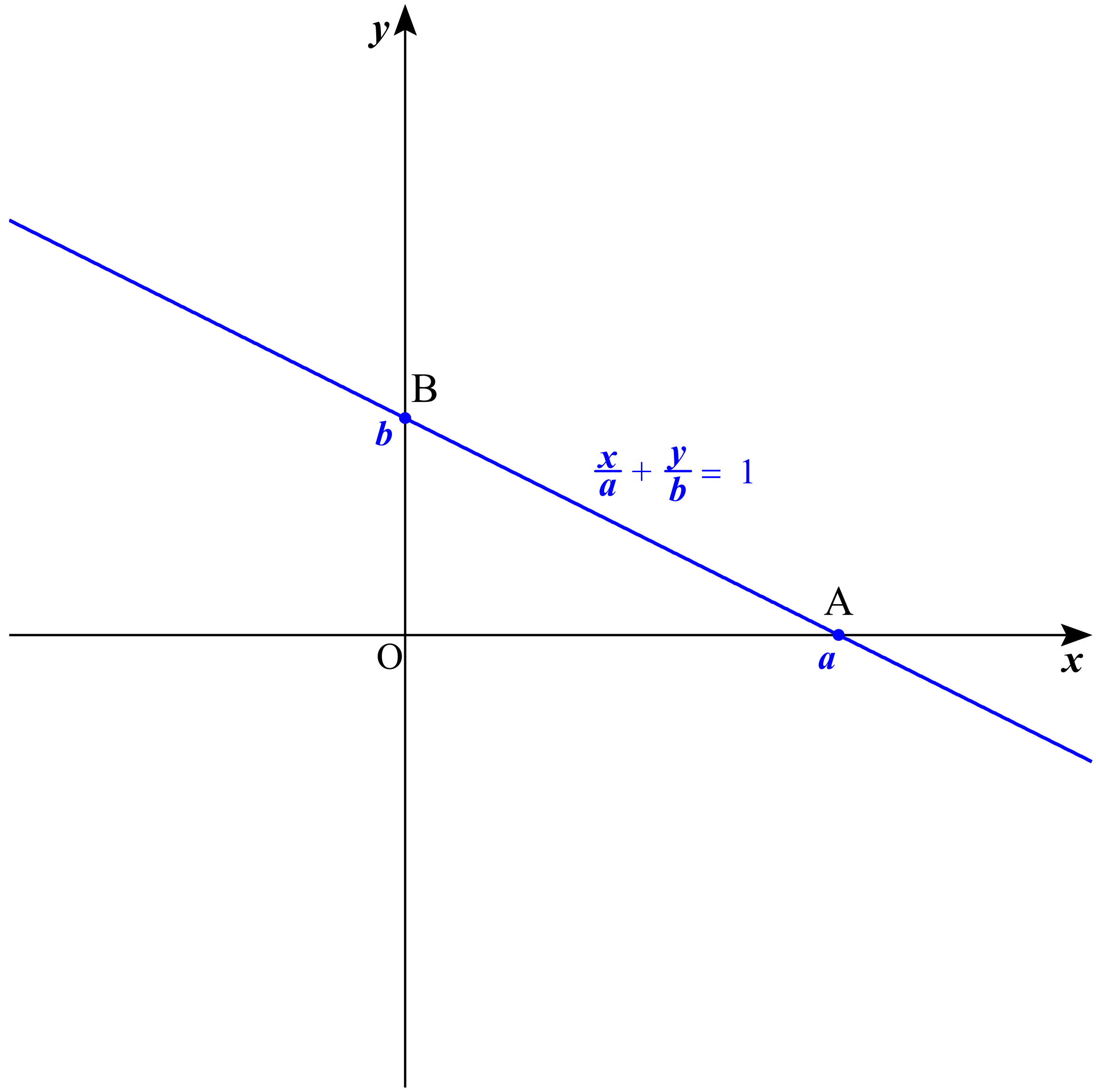
$$f(\alpha)=\frac{4\sin 2\alpha}{7+\cos 2a}$$
$$=\frac{\dfrac{16\sqrt{3}}{7}}{7-\dfrac{1}{7}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ゆえに，線分$\mathrm{X_AX_B}$の長さの最大値は$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

切片と直線の方程式・平面の方程式

x 切片を a，y 切片を b とする直線の方程式

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ （a,b は 0 でない実数）

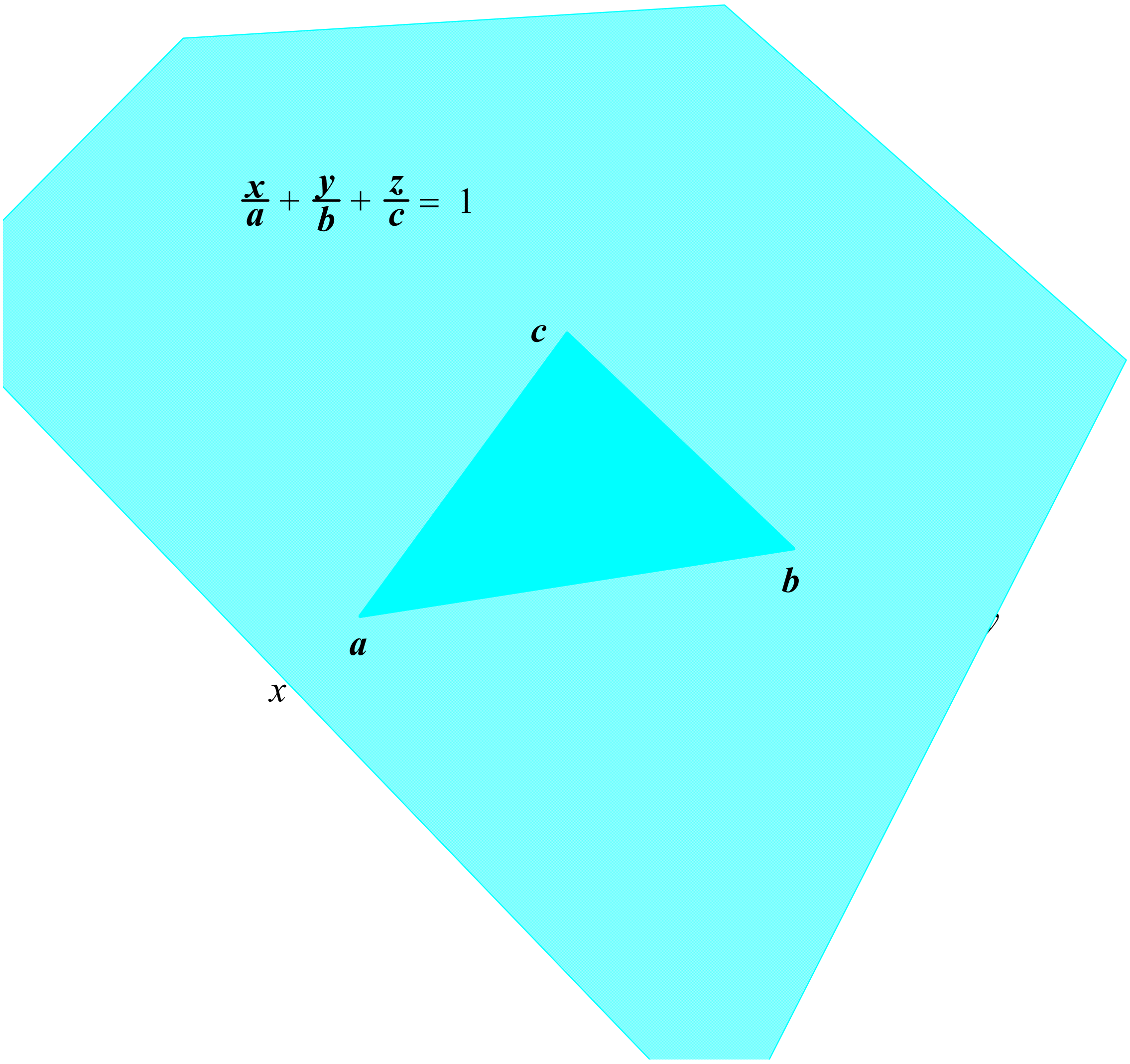


証明

A$(a,0)$，B$(0.b)$を通る直線の方程式は，$y=-\dfrac{b}{a}x+b$　$\therefore \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

x 切片を a，y 切片を b，z 切片を c とする平面の方程式

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ （a,b,c は 0 でない実数）



証明

A$(a,0,0)$，B$(0.b,0)$，C$(0,0,c)$を通る平面の方程式を $px+qy+rz=s$ とすると，

$pa=qb=rc=s$ より，$p=\dfrac{s}{a},q=\dfrac{s}{b},r=\dfrac{s}{c}$ 　$\therefore \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$